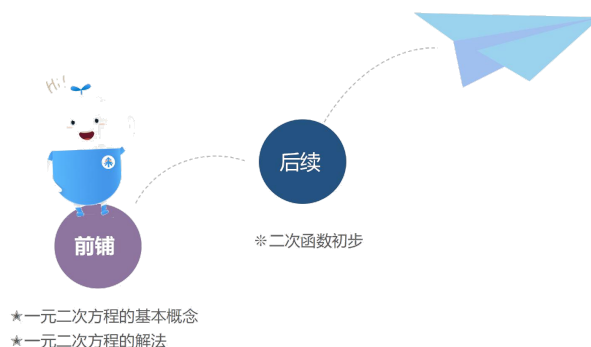
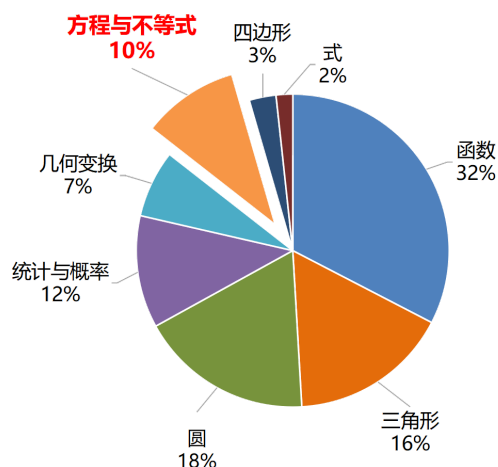


第1讲 一元二次方程的概念及解法

一元二次方程属于人教版第二十一章的内容，这部分的易错点为解一元二次方程及一元二次方程的实际应用，难点为根与判别式的关系。故这部分我们分为《一元二次方程》、《一元二次方程进阶》两个模块。本模块为《一元二次方程》，旨在帮助学生熟练掌握一元二次方程。

本模块难度适中，适用于一元二次方程的短期突破，本模块分为一元二次方程的概念及解法、一元二次方程的判别式和根式关系、一元二次方程的实际应用3讲内容，帮助学生熟悉一元二次方程部分常见题型，学会利用一元二次方程解决实际问题。

知己知彼



一、一元二次方程的基本概念

一元二次方程的概念

一元二次方程

一元二次方程概念：只含有_____，并且未知数的最高次数是_____的_____方程，叫做一元二次方程。

一元二次方程的一般式：_____，_____为二次项系数；_____为一次项系数，_____为常数项。

【注意事项】

- ①“ $a \neq 0$ ”是一元二次方程的一般形式的重要组成部分。当 $a = 0, b \neq 0$ 时，它就成为一元一次方程。如果明确了 $ax^2 + bx + c = 0$ 是一元二次方程，就隐含 $a \neq 0$ 这个条件。
- ②任何一个一元二次方程经过整理都能化成一般形式 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 。在判断一个方程是不是一元二次方程时，要先化成一般形式，再判断。
- ③二次项系数，一次项系数和常数项都是在一般形式下定义的，所以在确定一元二次方程各项的系数时，应先将方程化为一般形式。
- ④项的系数包括它前面的符号。如： $\frac{1}{2}x^2 - 3x - 1 = 0$ 的一次项系数是 -3 ，而不是 3 。
- ⑤若一元二次方程化为一般形式，没出现一次项 bx ，则 $b = 0$ 。

例题1

知识点拨

需要重点强调转换为一般式后，对各项系数进行判断。

重点注意一元二次方程的意义，如果是一元二次方程，二次项系数不能为0

1. 方程 $2x^2 - 6x - 1 = 0$ 的二次项系数为_____，一次项系数为_____，常数项为_____。

【答案】2；-6；-1

【解析】 $2x^2 - 6x - 1 = 0$ 的二次项系数为2，一次项系数为-6，常数项系数为-1。

【标注】【知识点】一元二次方程的一般形式

2. 若关于 x 的方程 $(m+1)x^2 + 4mx - 4 = 0$ 是一个一元二次方程，则 m 的取值范围是_____，在这个方程中，二次项系数是_____，一次项系数是_____，常数项是_____。

【答案】 $m \neq -1; m+1; 4m; -4$

【解析】 略.

【标注】 【知识点】 由一元二次方程定义求参数的值

练习1

3. $3y(y+1) = 7(y+2) - 5$ 化成一般形式为 _____, 其中二次项系数是 _____, 一次项系数是 _____, 常数项是 _____.

【答案】 $3y^2 - 4y - 9 = 0; 3; -4; -9$

【解析】 方程 $3y(y+1) = 7(y+2) - 5$ 整理得： $3y^2 - 4y + 9 = 0$ ，
其中二次项系数为3，一次项系数是-4，常数项是-9.

【标注】 【知识点】 一元二次方程的一般形式

4. 若方程 $(m-1)x^{|m|+1} - 2x = 3$ 是关于 x 的一元二次方程，则 m 的值为 _____.

【答案】 -1

【解析】 由题意可得

$$\begin{cases} |m| + 1 = 2 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases},$$

$\therefore m = -1$.

【标注】 【知识点】 由一元二次方程定义求参数的值

一元二次方程的根

一元二次方程的根

使方程左、右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的_____, 也叫做一元二次方程的_____.

将此数代入这个一元二次方程的左、右两边，看是否相等。
若相等，_____；若不相等，就_____。

例题2

知识点拨

对于基础的一元二次方程已知一个根，可将对应的根代入一元二次方程，求解出对应参数

5. 已知关于 x 的方程 $x^2 + ax - 6 = 0$ 的一个根是2，则 a 的值是（ ）.

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

【答案】 C

【解析】 将 $x = 2$ 代入 $x^2 + ax - 6 = 0$ ，得 $2^2 + 2a - 6 = 0$.

解得 $a = 1$ ，

故选：C.

【标注】 【知识点】 由一元二次方程的解求参数的值

6. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m - 2)x^2 + 3x + m^2 - 4 = 0$ 有一个解是0，求 m 的值.

【答案】 $m = -2$.

【解析】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(m - 2)x^2 + 3x + m^2 - 4 = 0$ 有一个解是0，

$\therefore m^2 - 4 = 0$ ，

解得 $m_1 = 2$ ， $m_2 = -2$.

又 $\because (m - 2)x^2 + 3x + m^2 - 4 = 0$ 为一元二次方程，

$\therefore m - 2 \neq 0$ ，即 $m \neq 2$ ，

$\therefore m = -2$.

【标注】 【知识点】 由一元二次方程根的情况确定参数

注意：此题中要求为一元二次方程，需让二次项系数不为0

练习2

7. 若关于 x 的一元二次方程为 $ax^2 + bx + 5 = 0 (a \neq 0)$ 的解是 $x = 1$ ，则 $2013 - a - b$ 的值是（ ）.

A. 2018

B. 2008

C. 2014

D. 2012

【答案】 A

【解析】 $\because x = 1$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + 5 = 0$ 的一个根，

$\therefore a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 5 = 0$ ，

$$\therefore a + b = -5 ,$$

$$\therefore 2013 - a - b = 2013 - (a + b) = 2013 - (-5) = 2018 .$$

故选：A .

【标注】【知识点】利用根求代数式的值

8. 已知关于 x 的一元二次方程 $(a+1)x^2 - 3x + 2a - 1 = 0$ 有一个根为 $x = 1$ ，则 a 的值为（ ） .

A. 0

B. ± 1

C. 1

D. -1

【答案】C

【解析】 $\because (a+1)x^2 - 3x + 2a - 1 = 0$ ，有一个根为 $x = 1$ ，

故 $(a+1) \times 1 - 3 + 2a - 1 = 0$ ，解得： $a = 1$.

故选C .

【标注】【知识点】由一元二次方程的解求参数的值

二、一元二次方程的解法

一般地，对于方程 $x^2 = p$

当 $p > 0$ 时，根据平方根的意义，方程有两个 不等的 实数根 $x_1 = -\sqrt{p}$ ， $x_2 = \sqrt{p}$ ；

当 $p = 0$ 时，方程有两个 相等 的实数根 $x_1 = x_2 = 0$ ；

当 $p < 0$ 时，因为对任意实数 x ，都有 $x^2 \geq 0$ ，所以方程 无实数根 .

【注意】

当 $p > 0$ 时，注意有正负两个结果 .

 直接开方法

 例题3

知识点拨

对于常规的直接开方法，只需要将平方项移动到一边，其他数字移动到另一边

但注意被开方数需要为**非负数**

9. 求 x 的值： $(x - 15)^2 = 169$.

【答案】 $x = 28$ 或 $x = 2$.

【解析】 $(x - 15)^2 = (\pm 13)^2$,

$$x - 15 = 13 \text{ 或 } x - 15 = -13 ,$$

$$\therefore x = 28 \text{ 或 } x = 2 .$$

【标注】【能力】运算能力

【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

10. 解方程： $(x - m)^2 = n$ (n 为正数) .

【答案】 $x_1 = \sqrt{n} + m$, $x_2 = -\sqrt{n} + m$.

【标注】【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

11. 解方程： $(2x + 1)^2 = (x - 1)^2$.

【答案】 $x_1 = -2$, $x_2 = 0$.

【解析】 $(2x + 1)^2 = (x - 1)^2$,

$$2x + 1 = \pm(x - 1) ,$$

$$2x + 1 = x - 1 ,$$

$$x = -2 .$$

$$2x + 1 = -x + 1 ,$$

$$3x = 0 ,$$

$$x = 0 .$$

$$\therefore x_1 = -2 , x_2 = 0 .$$

【标注】【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

练习3

12. 解方程： $\frac{1}{4}(x + 1)^2 = 25$.

【答案】 $x_1 = -11$, $x_2 = 9$.

【标注】【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

13. 解方程： $(x-2)^2 = (2x+3)^2$.

【答案】 $x_1 = -5$, $x_2 = -\frac{1}{3}$.

【解析】 方法一：

$$4x^2 + 12x + 9 = x^2 - 4x + 4 ,$$

$$3x^2 + 16x + 5 = 0 ,$$

$$(3x+1)(x+5) = 0 ,$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} , x_2 = -5 .$$

方法二： $2x+3 = \pm(x-2)$

、

$$\textcircled{1} 2x+3 = x-2$$

$$x_1 = -5 .$$

$$\textcircled{2} 2x+3 = -(x-2) ,$$

$$2x+3 = -x+2$$

$$3x = -1$$

$$x_2 = -\frac{1}{3} .$$

【标注】【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

14. 解方程： $(3x+2)^2 = 4(x-1)^2$.

【答案】 $x_1 = -4$, $x_2 = 0$.

【解析】 略

【标注】【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

【能力】运算能力

配方法

知识点拨

通过前面的学习，我们发现如果一个方程满足 $x^2 = p(p \geq 0)$ ，可以通过直接开方法解方程，如果不满足 $x^2 = p(p \geq 0)$ 这个形式，就可以利用配方法解方程。

例题4

15. 若方程 $x^2 + 12x + m^2 = 0$ 的左边可以写成一个完全平方式，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 ± 6

【解析】 $x^2 + 12x + m^2 = 0$ 左边可以写成一个完全平方式，

$$\therefore m^2 = \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 36 ,$$

$$\therefore m = \pm 6 .$$

【标注】 【知识点】完全平方公式的计算-不含分式

16. 填空： $x^2 + 8x + \underline{\hspace{2cm}} = (x + \underline{\hspace{2cm}})^2$.

【答案】 $16 ; 4$

【解析】 $\because 8x = 2 \times 4 \cdot x$,

$\therefore$ 第一个空格应填 $4^2 = 16$, 第二空格应填 4 ,

$$\text{即 } x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 .$$

【标注】 【知识点】配方思想的运用

17. 用配方法解关于 x 的方程 $x^2 + 2x + q = 0$ (q 为已知常数) .

【答案】 当 $q \leq 1$ 时, $x_1 = -1 + \sqrt{1-q}$, $x_2 = -1 - \sqrt{1-q}$;

当 $q > 1$ 时, 原方程无实数根 .

【解析】 $(x+1)^2 + q - 1 = 0$;

$$(x+1)^2 = 1 - q .$$

$\therefore$ 当 $1 - q \geq 0$ 即 $q \leq 1$ 时 ,

$$x + 1 = \pm \sqrt{1 - q} ,$$

$$\text{即 } x_1 = -1 + \sqrt{1 - q} , x_2 = -1 - \sqrt{1 - q} ;$$

当 $1 - q < 0$ 即 $q > 1$ 时, 原方程无实数根 .

【标注】 【方法】配方法

【能力】运算能力

【知识点】配方法求一元二次方程的根

18. 配方： $x^2 - \frac{3}{2}x + \underline{\hspace{2cm}} = (x - \underline{\hspace{2cm}})^2$.

【答案】 $\frac{9}{16} ; \frac{3}{4}$

【解析】 $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2$
故答案为： $\frac{9}{16} ; \frac{3}{4}$.

【标注】【知识点】配方法求一元二次方程的根

知识点拨

对于二次项系数不是1的方程，可先将二次项系数化为1后，再进行配方

19. 解方程： $2y^2 - 5y + 3 = 0$.

【答案】 $y_1 = \frac{3}{2} , y_2 = 1$.

【标注】【知识点】配方法求一元二次方程的根

方法总结（二次项系数为1）

如果一个一元二次方程的二次项系数为1，为了把方程中的二次项和一次项配凑成一个 完全平方公式，我们只需要在式子后面加上“ 一次项系数的一半的平方 ”即可 .

$$x^2 \pm mx + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \left(x \pm \frac{m}{2}\right)^2$$

练习4

20. 配方法解方程 .

(1) $x^2 + 4x - 6 = 0$.

(2) $x^2 - 2x = 8$.

【答案】 (1) $x = -2 \pm \sqrt{10}$.

(2) $x_1 = 4$ 或 $x_2 = -2$.

【解析】 (1) $\because x^2 + 4x - 6 = 0$,

$$\therefore x^2 + 4x + 4 = 10 ,$$

$$\therefore (x + 2)^2 = 10 ,$$

$$\therefore x = -2 \pm \sqrt{10} .$$

(2) $\because x^2 - 2x = 8$,

$$\therefore x^2 - 2x + 1 = 9 ,$$

$$\therefore (x-1)^2 = 9,$$

$$\therefore x_1 = 4 \text{ 或 } x_2 = -2.$$

【标注】【知识点】配方法求一元二次方程的根

21. 解方程： $-4x = -3x^2 + 2$.

【答案】 $x_1 = \frac{2+\sqrt{10}}{3}, x_2 = \frac{2-\sqrt{10}}{3}$.

【标注】【知识点】配方法求一元二次方程的根

22. 若方程 $9x^2 - (k+2)x + 4 = 0$ 的左边可以写成一个完全平方式，则 k 值为 () .

A. 10

B. 10或14

C. -10或14

D. 10或-14

【答案】 D

【解析】 方程的左边 $9x^2 - (k+2)x + 4 = 0$ 变形为： $(3x)^2 - (k+2)x + (\pm 2)^2$,

$$\therefore -(k+2)x = 2 \cdot 3x \cdot (\pm 2) = \pm 12x, \text{ 即 } -(k+2) = 12 \text{ 或 } -(k+2) = -12,$$

$$\text{解得: } k = -14 \text{ 或 } k = 10.$$

故选D.

【标注】【知识点】配方法求一元二次方程的根

23. 完成下列配方.

(1) $2x^2 + 4x + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}})^2$.

(2) $2x^2 + 12x + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}})^2$.

(3) $3x^2 + 7x + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}})^2$.

(4) $3x^2 + 11x + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}})^2$.

(5) $-x^2 + 9x + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}})^2$.

(6) $-x^2 - 5x + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}})^2$.

(7) $-2x^2 - 13x + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}})^2$.

(8) $-3x^2 - 15x + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}})^2$.

(9) 通过这道题，你得到的结论是：

① $ax^2 + bx + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}}) = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}})^2$.

② $-ax^2 + bx + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}}) = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}})^2$.

【答案】(1) $2; 2; x+1$

(2) $18; 2; x+3$

(3) $\frac{49}{12}; 3; x+\frac{7}{6}$

(4) $\frac{121}{12}; 3; x+\frac{11}{6}$

(5) $\left(-\frac{81}{4}\right); -1; x-\frac{9}{2}$

(6) $\left(-\frac{25}{4}\right); -1; x+\frac{5}{2}$

(7) $\left(-\frac{169}{8}\right); -2; x+\frac{13}{4}$

(8) $\left(-\frac{75}{4}\right); -3; x+\frac{5}{2}$

(9) ① $\frac{b^2}{4a}; a; x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}; a; x+\frac{b}{2a}$

② $\left(-\frac{b^2}{4a}\right); -a; x^2-\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}; -a; x-\frac{b}{2a}$

【解析】(1) 由完全平方公式可得 $2x^2+4x+2=2(x+1)^2$.

(2) 由完全平方公式可得 $2x^2+12x+18=2(x+3)^2$.

(3) 由完全平方公式可得 $3x^2+7x+\frac{49}{12}=3\left(x+\frac{7}{6}\right)^2$.

(4) 由完全平方公式可得 $3x^2+11x+\frac{121}{12}=3\left(x+\frac{11}{6}\right)^2$.

(5) 由完全平方公式可得 $-x^2+9x+\left(-\frac{81}{4}\right)=-\left(x-\frac{9}{2}\right)^2$.

(6) 由完全平方公式可得 $-x^2-5x+\left(-\frac{25}{4}\right)=-\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$.

(7) 由完全平方公式可得 $-2x^2-13x+\left(-\frac{169}{8}\right)=-2\left(x+\frac{13}{4}\right)^2$.

(8) 由完全平方公式可得 $-3x^2-15x+\left(-\frac{75}{4}\right)=-3\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$.

(9) ① 由完全平方公式可得 $ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

② 由完全平方公式可得 $-ax^2+bx+\left(-\frac{b^2}{4a}\right)$

$$=-a\left(x^2-\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$=-a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2.$$

【标注】【知识点】配方思想的运用

用配方法解一元二次方程的步骤如下

(1) 移项：把方程中含有未知数的项移到方程的左边，常数项移到方程的右边；

(2) 二次项系数化为1：根据等式的性质把二次项的系数化为“1”；

(3) 配方：把方程两边都加上一次项系数的一半的平方，使左边配成一个完全平方式；

(4) 开平方：运用直接开平方法解方程。

24. 用配方法解一般的一元二次方程： $ax^2 + bx + c = 0$ (a 、 b 、 c 为常数且 $a \neq 0$)

【答案】当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，原方程无解。

当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时，方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的实数根可写成

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

【解析】因为 $a \neq 0$ ，方程两边同除以 a ，得 $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

移项，得 $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ ，配方 $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

因为 $a \neq 0$ ，所以 $4a^2 > 0$ ，当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时，直接开平方得：

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|},$$

又因为式子前面已有符号“ $\pm$ ”，所以无论 $a > 0$ 还是 $a < 0$ ，最终结果总是 $\pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ，

即 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ；当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，原方程无解。

当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时，方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的实数根可写成

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

【标注】【能力】运算能力

【知识点】配方法求一元二次方程的根

🔗 公式法

【教法回顾】

一元二次方程的求根公式是由配方法演变而来：

【例如】用配方法解方程： $ax^2 + bx + c = 0$ (a 、 b 、 c 为常数且 $a \neq 0$)

解：移项，得

$$ax^2 + bx = -c$$

二次项系数化为1，得

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

配方，得

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

即

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \text{ ①}$$

因为 $a \neq 0$ ，所以 $4a^2 > 0$ ．式子 $b^2 - 4ac$ 的值有以下三种情况：

(1) $b^2 - 4ac > 0$ ，

这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$ ，由①得

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

方程有两个不等的实数根

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(2) $b^2 - 4ac = 0$ ，

这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$ ，由①可知方程有两个相等的实数根

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

(3) $b^2 - 4ac < 0$ ，

这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$ ，由①可知 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$ ，

而 x 取任何实数都不能使 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$ ．因此方程无实数根．

|| 例题5

25. 小明同学用配方法推导关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的求根公式时，对于 $b^2 - 4ac > 0$ 的情况，他是这样做的：

由于 $a \neq 0$ ，方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 变形为：

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad \text{第一步}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \text{第二步}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{第三步}$$

$$\because b^2 - 4ac > 0$$

$$\therefore x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{第四步}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{第五步}$$

小明的解法从第 _____ 步开始出现错误；这一步的运算依据应是 _____ ．

【答案】 四；平方根的定义

【解析】 小明在第四步开始出现错误，这一步的运算依据应是平方根的定义．

$$\begin{aligned} \text{正确的步骤应为 } x + \frac{b}{2a} &= \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

【标注】 【知识点】公式法求一元二次方程的根

知识点拨

对于含有字母的方程，注意被开方数是否为非负数

如果无法确定，需要进行分类讨论

26. 一元二次方程 $5x^2 - 7x = -2$.

化为标准式：_____ .

对应的 $a =$ _____ , $b =$ _____ , $c =$ _____ .

计算 $\Delta =$ _____ , Δ 的正负性： Δ _____ 0 .

代入公式求解： $x_1 =$ _____ , $x_2 =$ _____ .

【答案】 $5x^2 - 7x + 2 = 0$; 5 ; -7 ; 2 ; $b^2 - 4ac = 9$; > ; 1 ; $\frac{2}{5}$

【解析】 $5x^2 - 7x + 2 = 0$,

$a = 5$, $b = -7$, $c = 2$.

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 9$, $\Delta > 0$.

$\therefore x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{5}$.

【标注】【知识点】公式法求一元二次方程的根

27. 公式法解方程：

(1) $x^2 - \frac{1}{4} = 2x$.

(2) $3x^2 - 8x + 2 = 0$.

(3) $2x - 1 = -2x^2$.

【答案】 (1) $x_1 = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

(2) $x_1 = \frac{4 + \sqrt{10}}{3}$, $x_2 = \frac{4 - \sqrt{10}}{3}$.

(3) $x_1 = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.

【标注】【知识点】公式法求一元二次方程的根

练习5

28. 解方程： $2x^2 - 3x - 1 = 0$.

【答案】 $x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}$.

【解析】方法一： $2x^2 - 3x - 1 = 0$.

$$a = 2, b = -3, c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 17 > 0,$$

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根,

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4},$$
$$\therefore x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}.$$

方法二： $2x^2 - 3x - 1 = 0$,

$$2x^2 - 3x = 1,$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2},$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{16},$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4},$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}.$$

【标注】【知识点】公式法求一元二次方程的根

29. 用公式法解下列方程

(1) $x^2 - 2x - 1 = 0$.

(2) $2x^2 - 3x - 1 = 0$.

(3) $4x^2 - 2x = 1$.

(4) $\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$.

【答案】(1) $x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

(2) $x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}$.

(3) $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$.

(4) $x_1 = -1 + \sqrt{3}, x_2 = -1 - \sqrt{3}$.

【解析】(1) 略 .

(2) 略 .

(3) 略 .

(4) 略 .

【标注】【知识点】公式法求一元二次方程的根

【总结】

1. 式子 $b^2 - 4ac$ 叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的判别式，通常用希腊字母“ Δ ”表示它，即 $\Delta = b^2 - 4ac$.

2. 当 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时，方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的实数根可写为

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

的形式，这个式子叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的求根公式 .

因式分解法

解一元二次方程时，先 因式分解，使方程化为 两个一次式的乘积等于0 的形式，再使这两个一次式分别 等于0，从而 实现降次，这种解一元二次方程的方法叫做 因式分解法 .

因式分解法的根据

如果两个因式的乘积等于0，那么这两个因式至少有一个为0，反过来，如果两个因式中有一个因式为0，那么它们之积为0，即 $ab = 0$ ，则 $a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $a = b = 0$

例如： $(2x - 1)(3 - x) = 0$ ，则 $2x - 1 = 0$ 或 $3 - x = 0$ ，从而可得到方程的解 .

例题6

知识点拨

对于较为常见的乘法公式，可先将式子化为常见的乘法公式形式再进行因式分解

30. 选择适当方法解方程： $3(x - 1)(3x + 1) = (x - 1)(2x + 5)$.

【答案】 $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{7}$.

【解析】 整理得： $7x^2 - 9x + 2 = 0$,

因式分解得： $(7x - 2)(x - 1) = 0$,

解得 $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2}{7}$.

【标注】 【知识点】 因式分解法求一元二次方程的根

31. 解方程： $x^2 - 10x + 25 = 0$.

【答案】 $x_1 = x_2 = 5$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】配方法求一元二次方程的根

【方法】配方法

32. 用因式分解法解方程： $4(x-2)^2 - 9(x+1)^2 = 0$

【答案】 $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = -7$

【解析】 $[2(x-2) + 3(x+1)][2(x-2) - 3(x+1)] = 0$

即 $(5x-1)(-x-7) = 0$

$\therefore x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = -7$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

练习6

33. 解方程： $x(x+3) - (2x+6) = 0$.

【答案】 $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

【解析】提公因式，得 $(x+3)(x-2) = 0$,

得 $x+3=0$ 或 $x-2=0$,

解得 $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

34. 用因式分解法解方程： $(x-1)^2 + 1 = 2(x-1)$

【答案】 $x_1 = x_2 = 2$

【解析】 $(x-1)^2 - 2(x-1) + 1 = 0$, 即 $(x-1-1)^2 = 0$,

$\therefore (x-2)^2 = 0 \therefore x_1 = x_2 = 2$.

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

35. 解方程： $(5x-3)^2 = (x+1)^2$.

【答案】 $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

【解析】 $(5x - 3 + x + 1)(5x - 3 - x - 1) = 0$,
 $5x - 3 + x + 1 = 0$, 或 $5x - 3 - x - 1 = 0$.
解得 $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$.

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

注意

将对应的式子看作整体进行分解即可

例题7

知识点拨

对于系数为1的一元二次方程，可尝试用十字相乘法进行尝试分解

36. 由多项式乘法： $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ ，将该式从右到左使用，即可得到“十字相乘法”进行因式分解的公式： $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$.

示例：分解因式： $x^2 + 5x + 6 = x^2 + (2+3)x + 2 \times 3 = (x+2)(x+3)$.

(1) 分解因式： $x^2 + 6x + 8 = (x + \underline{\quad})(x + \underline{\quad})$.

(2) 应用：请用上述方法解方程： $x^2 - 3x - 4 = 0$.

【答案】 (1) 2; 4

(2) $x = -1$ 或 $x = 4$.

【解析】 (1) $x^2 + 6x + 8 = x^2 + (2+4)x + 2 \times 4 = (x+2)(x+4)$,

故答案为：2, 4.

(2) $\because x^2 - 3x - 4 = 0$,

$\therefore (x+1)(x-4) = 0$,

则 $x+1=0$ 或 $x-4=0$,

解得： $x = -1$ 或 $x = 4$.

【标注】【知识点】二次项系数为 ± 1 的十字相乘

37. 解方程：

(1) $x^2 - 2x - 3 = 0$.

(2) $2x^2 + 3x - 1 = 0$.

【答案】 (1) $x_1 = 3, x_2 = -1$.

$$(2) x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} .$$

【解析】 (1) 方法一 : $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x^2 - 2x = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 = 4$$

$$(x - 1)^2 = 4$$

$$x - 1 = \pm 2$$

$$x_1 = 3, x_2 = -1 .$$

方法二 : $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 3, x_2 = -1 .$$

$$(2) 2x^2 + 3x - 1 = 0 ,$$

$$\therefore a = 2, b = 3, c = -1 ,$$

$$\therefore \Delta = 9 - 4 \times 2 \times (-1) = 17 > 0 ,$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} ,$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} .$$

【标注】【知识点】公式法解一元二次方程的一般步骤

【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

练习7

38. 用十字相乘法解方程 :

$$(1) x^2 + 7x - 8 = 0 .$$

$$(2) 3a^2 - 7a - 6 = 0 .$$

$$(3) 3x^2 - 8x - 3 = 0 .$$

$$(4) 5x^2 + 12x - 9 = 0 .$$

【答案】 (1) $x_1 = -8, x_2 = 1$.

$$(2) a_1 = -\frac{2}{3}, a_2 = 3 .$$

$$(3) x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = 3 .$$

$$(4) x_1 = -3, x_2 = \frac{3}{5} .$$

【解析】 (1) $x^2 + 7x - 8 = 0 ,$

$$(x+8)(x-1)=0,$$

$$x+8=0 \text{ 或 } x-1=0,$$

$$x_1=-8, x_2=1.$$

$$(2) \quad 3a^2-7a-6=0,$$

$$(3a+2)(a-3)=0,$$

$$3a+2=0 \text{ 或 } a-3=0,$$

$$a_1=-\frac{2}{3}, a_2=3.$$

$$(3) \quad 3x^2-8x-3=0,$$

$$(3x+1)(x-3)=0,$$

$$3x+1=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

$$x_1=-\frac{1}{3}, x_2=3.$$

$$(4) \quad 5x^2+12x-9=0,$$

$$(x+3)(5x-3)=0,$$

$$x+3=0 \text{ 或 } 5x-3=0,$$

$$x_1=-3, x_2=\frac{3}{5}.$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

 我学会了什么